1 Gegeben sind die Gerade $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}7\\-9\\-6\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ und die Ebene $E: 5x_1-3x_2+4x_3-23=0$.

1.1 Berechnen Sie den Schnittpunkt von E mit g.

g in $E \Rightarrow \lambda=5 \Rightarrow S(2\,|\,1\,|\,4)$

1.2 Berechnen Sie den Abstand des Aufpunkts $A(7\,|\,-9\,|\,-6)$ von g von der Ebene E.

A in E, Betrag davon und durch $|\vec{n}_E|$ teilen $\Rightarrow d=2{,}12$

2 Berechnen Sie die Gleichung der Schnittgeraden g der beiden Ebenen

$E: 2x_1-2x_2+2=0$ und $F:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

$F: x_1-x_2+x_3-5=0$, z. B. $x_1=0$ annehmen, x_2 aus E und x_3 aus F ermitteln

$\Rightarrow S(0\,|\,1\,|\,6)$, $\vec{v}_g=\vec{n}_E\times\vec{n}_F\sim\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow g:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\6\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

3 Gegeben sind der Punkt $R(6\,|\,5\,|\,-3)$, die Gerade $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}$ sowie die Ebene

$E: 2x_1+x_2-2x_3-14=0$.

3.1 Berechnen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes S von R bezüglich E.

$l:\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\5\\-3\end{pmatrix}+\tau\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ in $E \Rightarrow \tau=-1 \Rightarrow \tau'=-2$ in $l \Rightarrow S(2\,|\,3\,|\,1)$

3.2 Berechnen Sie den Winkel den die Gerade g mit der Ebene E einschließt.

$$\cos\hat{\varphi}=\frac{\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}}{\sqrt{2^2+(-3)^2+5^2}\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} \Rightarrow \hat{\varphi}=60{,}9^\circ \Rightarrow \varphi=29{,}1^\circ$$

4 Für welche zwei Werte von t hat der Punkt $P(3\,|\,1\,|\,6)$ von der Ebene

$E: 8x_1 + tx_2 - 20x_3 - 28 = 0$ den Abstand $d = 3$?

P in E einsetzen, Betrag nehmen und durch $|\vec{n}_E|$ teilen:

$$\frac{|8\cdot 3 + t\cdot 1 - 20\cdot 6 - 28|}{\sqrt{8^2 + t^2 + (-20)^2}} = 3$$

$$\frac{|t - 124|}{\sqrt{464 + t^2}} = 3$$

$$|t - 124| = 3\sqrt{464 + t^2}$$

$$(t - 124)^2 = 9\left(464 + t^2\right)$$

$$t^2 - 248t + 15376 = 4176 + 9t^2$$

$$0 = 8t^2 + 248t - 11200$$

$$t_{1,2} = \frac{-248 \pm \sqrt{248^2 - 4\cdot 8\cdot(-11200)}}{2\cdot 8}$$

$$\Rightarrow t_1 = 25,\ t_2 = -56$$

5 Gegeben sind die Ebenen $E: x_2 - 5x_3 - 7 = 0$ und $F: x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4 = 0$.

5.1 Welchen Winkel schließen diese beiden Ebenen ein?

$$\cos\varphi = \frac{17}{\sqrt{0+1+25}\sqrt{1+4+9}} \Rightarrow \varphi = 27^\circ$$

5.2 Spiegeln Sie $A(-15\,|\,-6\,|\,13)$ an F.

$$l: \vec{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ in } F \Rightarrow \tau = 5 \Rightarrow \tau' = 10 \text{ in } l \Rightarrow A'(-5\,|\,14\,|\,-17)$$

5.3 Geben Sie die Gleichung der Schnittgeraden von E mit F an.

z. B. $x_2 = 7$ annehmen, x_3 aus E und x_1 aus F ermitteln $\Rightarrow S_1(-13\,|\,7\,|\,0)$

$$\vec{v}_g = \vec{n}_E \times \vec{n}_F \sim \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

6 Berechnen Sie die Spurgeraden der Ebene $E: 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 60$.

Spurpunkte: $S_1(20\,|\,0\,|\,0)$, $S_2(0\,|\,-12\,|\,0)$, $S_3(0\,|\,0\,|\,15)$

Spurgeraden: $g_{12}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$, $g_{23}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$, $g_{13}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix}$

7 Für welche Werte von t schließt die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2 \end{pmatrix}$ mit der Ebene

$E: 2x_1 + x_2 + x_3 - 5 = 0$ einen Winkel von 30° ein?

$\varphi = 30^\circ \Rightarrow \hat{\varphi} = 60^\circ \Rightarrow \cos\hat{\varphi} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{|1 \cdot 2 + t \cdot 1 + 2 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + t^2 + 2^2}\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} \Rightarrow t_1 = -1,\ t_2 = 17$

8 Die beiden Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 21 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind windschief.

8.1 Berechnen Sie den Abstand dieser beiden Geraden voneinander.

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \parallel h$

$E: x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 65 = 0$

$A_h(8 \mid -6 \mid 21)$ in E einsetzen, Betrag nehmen und durch $|\vec{n}_E|$ teilen:

$d = \frac{|8 + 12 + 105 - 65|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2}} \approx 10{,}95$

8.2 Es gibt zwei Punkte A auf g und B auf h, die voneinander diesen kürzesten Abstand haben. Bestimmen Sie einen der beiden Punkte, wahlweise den auf g oder den auf h.

$F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \perp E$

$F: x_1 - 2x_2 - x_3 + 7 = 0$

h in $F \Rightarrow \mu = 1 \Rightarrow B(7 \mid -4 \mid 22)$

nicht verlangt aber hier trotzdem auch Berechnung von A:

Lot durch B auf E: $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 22 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

l in E einsetzen $\Rightarrow \tau = -2$ in l einsetzen $\Rightarrow A(5 \mid 0 \mid 12)$