AUFGABE 1 **6 Punkte**

Lösen Sie unter Verwendung der Methoden „Trennung der Variablen“ und „Variation der Konstanten“ das Anfangswertproblem $y' = \dfrac{2y}{x} + x^2\,,\ y\left(2\right) = -4\,.$

AUFGABE 2 **8 Punkte**

Lösen Sie unter Verwendung eines geeigneten partikulären Ansatzes das Anfangswertproblem $y' + 4y = 6 \cdot e^{-x} + 20x - 23\,,\ y\big(0\big) = -8\,.$

AUFGABE 3 **12 Punkte**

Transformieren Sie die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 17 \\ 19 & 26 & 47 \\ -14 & -20 & -36 \end{pmatrix}$ auf Diagonalgestalt.

Geben Sie die Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ sowie die Diagonalmatrix $\mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}$ an.

AUFGABE 4 **5 Punkte**

Die Funktion $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ soll über A integriert werden. Dabei ist A das Dreieck mit den Eckpunkten $P\left(2 \mid 1\right)$, $Q\left(8 \mid 4\right)$ und $R\left(5 \mid 7\right)$.
Geben Sie geeignete Integrationsgrenzen an für $\iint\limits_A f\left(x;y\right)\,dA$.

AUFGABE 5 **6 Punkte**

Für ein Getriebe wird eine rotationssymmetrische Zahnstange benötigt. Rotiert man den Graphen der Funktion $f : [0; 5\pi] \to \mathbb{R}\,,\ \ x \mapsto 1 + \cos x$ um die x–Achse, entsteht ein derartiges Objekt. Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunkts.

Tipp: $V = \dfrac{15}{2}\pi^2$

AUFGABE 6 **6 Punkte**

Lösen Sie das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ mit dem Gaußschen Eliminationsalgorithmus.

Geben Sie eine Darstellung der Lösung in ganzen Zahlen an.

AUFGABE 7 **7 Punkte**

Bestimmt werden soll die positive Nullstelle der Funktion:

$$f(x) = 3 - 2x^2 + \ln\left(x^3 - x^2 + 1\right) = 0$$

a) Entwickeln Sie $f(x)$ in ein Mac Laurin Polynom 2. Ordnung und lösen Sie die so erhaltene quadratische Gleichung.

$$f(x) = 3 - 2x^2 + \ln\left(x^3 - x^2 + 1\right)$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^3 - x^2 + 1} - 4x$$

$$f''(x) =$$

b) Um die Näherung noch zu verbessern, wenden Sie das Newtonverfahren mit dem Startwert $x_0 = 1{,}0000$ zweimal an.

Geben Sie x_1 und x_2 mit vier Nachkommastellen an.