AUFGABE 1 **6 Punkte**

Lösen Sie unter Verwendung der Methoden „Trennung der Variablen“ und „Variation der Konstanten“ das Anfangswertproblem $y' = \frac{2y}{x} + x^2$, $y(2) = -4$.

TdV:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = 2\ln|x| + \tilde{c}$$

$$|y| = e^{2\ln|x|+\tilde{c}} = \left(e^{\ln|x|}\right)^2 \cdot e^{\tilde{c}} = |x|^2 \cdot e^{\tilde{c}}$$

$$y = c \cdot x^2$$

VdK:

$$y = C(x) \cdot x^2 \Rightarrow y' = C' \cdot x^2 + C \cdot 2x$$

Einsetzen in DGL:

$$C' \cdot x^2 + C \cdot 2x = \frac{2C \cdot x^2}{x} + x^2$$

$$C' \equiv 1$$

$$C = x + c$$

Konstante aus Anfangswert bestimmen:

$$y = (x + c) \cdot x^2$$

$$-4 = (2 + c) \cdot 2^2$$

$$-1 = 2 + c$$

$$c = -3$$

Spezielle Lösung angeben:

$$y_s(x) = (x - 3) \cdot x^2$$

AUFGABE 2 **8 Punkte**

Lösen Sie unter Verwendung eines geeigneten partikulären Ansatzes das Anfangswertproblem $y' + 4y = 6 \cdot e^{-x} + 20x - 23$, $y\left(0\right) = -8$.

Homogene Gleichung:

$y' + 4y = 0$

$y' = -4y$

$y = c \cdot e^{-4x}$

Partikulärer Ansatz:

$y_p = Ae^{-x} + Bx + C$

$y_p' = -Ae^{-x} + B$

Einsetzen in DGL:

$-Ae^{-x} + B + 4\left(Ae^{-x} + Bx + C\right) = 6e^{-x} + 20x - 23$

$3Ae^{-x} + 4Bx + B + 4C = 6e^{-x} + 20x - 23$

Koeffizientenvergleich:

$3A = 6 \Rightarrow A = 2$

$4B = 20 \Rightarrow B = 5$

$B + 4C = -23 \Rightarrow 5 + 4C = -23 \Rightarrow 4C = -28 \Rightarrow C = -7$

$y_p = 2e^{-x} + 5x - 7$

Allgemeine Lösung:

$y = y_H + y_p$

$y = ce^{-4x} + 2e^{-x} + 5x - 7$

Konstante bestimmen:

$-8 = ce^{0} + 2e^{0} + 5 \cdot 0 - 7$

$-8 = c - 5$

$c = -3$

Spezielle Lösung angeben:

$y_s\left(x\right) = -3e^{-4x} + 2e^{-x} + 5x - 7$

AUFGABE 3 **12 Punkte**

Transformieren Sie die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 17 \\ 19 & 26 & 47 \\ -14 & -20 & -36 \end{pmatrix}$ auf Diagonalgestalt.

Geben Sie die Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ sowie die Diagonalmatrix $\mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}$ an.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 10 & 17 \\ 19 & 26-\lambda & 47 \\ -14 & -20 & -36-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\left(5-\lambda\right)\left(26-\lambda\right)\left(-36-\lambda\right) + 10 \cdot 47 \cdot \left(-14\right) + 17 \cdot 19 \cdot \left(-20\right)$$

$$-\left(-14\right)\left(26-\lambda\right) \cdot 17 - \left(-20\right) \cdot 47 \cdot \left(5-\lambda\right) - \left(-36-\lambda\right) \cdot 19 \cdot 10 =$$

$$\left(\lambda^2 - 31\lambda + 130\right)\left(-36-\lambda\right) - 6580 - 6460 + 6188 - 238\lambda + 4700 - 940\lambda + 190\lambda + 6840 =$$

$$-\lambda^3 - 5\lambda^2 + 986\lambda - 4680 + 4688 - 988\lambda =$$

$$-\lambda^3 - 5\lambda^2 - 2\lambda + 8 = 0$$

Unter den Teilern der Konstanten (8) findet sich $\lambda_1 = 1$ als Lösung:

$$\left(-\lambda^3 - 5\lambda^2 - 2\lambda + 8\right) : \left(\lambda - 1\right) = -\lambda^2 - 6\lambda - 8$$

$$\underline{-\left(-\lambda^3 + \lambda^2\right)}$$

$$-6\lambda^2 - 2\lambda$$

$$\underline{-\left(-6\lambda^2 + 6\lambda\right)}$$

$$-8\lambda + 8$$

$$\underline{-\left(-8\lambda + 8\right)}$$

$$0$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot \left(-1\right)\left(-8\right)}}{2 \cdot \left(-1\right)} = \frac{6 \pm 2}{2 \cdot \left(-1\right)}$$

$$\lambda_2 = -4$$

$$\lambda_3 = -2$$

EV zum EW $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 & 17 \\ 19 & 25 & 47 \\ -14 & -20 & -37 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 76 & 190 & 323 \\ 76 & 100 & 188 \\ -14 & -20 & -37 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 76 & 190 & 323 \\ 0 & -90 & -135 \\ -14 & -20 & -37 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 10 & 17 \\ 0 & 2 & 3 \\ -14 & -20 & -37 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad 4v_1 + 10 \cdot 3 + 17 \cdot \left(-2\right) = 0 \Rightarrow v_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

EV zum EW $\lambda_2 = -4$:

$$\begin{pmatrix} 9 & 10 & 17 \\ 19 & 30 & 47 \\ -14 & -20 & -32 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 27 & 30 & 51 \\ 19 & 30 & 47 \\ -14 & -20 & -32 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 27 & 30 & 51 \\ -8 & 0 & -4 \\ -14 & -20 & -32 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 9 & 10 & 17 \\ 2 & 0 & 1 \\ -14 & -20 & -32 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ v_2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad 9 \cdot 1 + 10 v_2 + 17 \cdot (-2) = 0 \Rightarrow v_2 = 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}5 \\ -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

EV zum EW $\lambda_3 = -2$:

$$\begin{pmatrix} 7 & 10 & 17 \\ 19 & 28 & 47 \\ -14 & -20 & -34 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 133 & 190 & 323 \\ 133 & 196 & 329 \\ -14 & -20 & -34 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 133 & 190 & 323 \\ 0 & 6 & 6 \\ -14 & -20 & -32 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 & 10 & 17 \\ 0 & 1 & 1 \\ -14 & -20 & -32 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad 7 v_1 + 10 \cdot 1 + 17 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow v_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(das letzte muss so sein, da gibt es nichts zu rechnen)

AUFGABE 4 **5 Punkte**

Die Funktion $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ soll über A integriert werden. Dabei ist A das Dreieck mit den Eckpunkten $P\left(2\,|\,1\right)$, $Q\left(8\,|\,4\right)$ und $R\left(5\,|\,7\right)$.
Geben Sie geeignete Integrationsgrenzen an für $\iint_A f\left(x;y\right)\,dA$.

$g_{PQ}: y = \frac{1}{2}x, \quad g_{PR}: y = 2x-3, \quad g_{QR}: y = 12-x$

Ausführlich nur für g_{PR}:

$y = m \cdot x + t$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-1}{5-2} = 2$

$y = 2x + t$

Jetzt P oder R einsetzen:

$1 = 2 \cdot 2 + t$

$t = -3$

Also: $g_{PR}: y = 2x - 3$

Nach unten begrenzt immer g_{PQ} die y-Werte; nach oben wird A für $x \in \left[2;5\right]$ durch g_{PR} und für $x \in \left[5;8\right]$ durch g_{QR} begrenzt. Ggf. Skizze machen!

$$\iint_A f\left(x;y\right)\,dA = \int_2^5 \int_{\frac{1}{2}x}^{2x-3} f\left(x;y\right)\,dy\,dx + \int_5^8 \int_{\frac{1}{2}x}^{12-x} f\left(x;y\right)\,dy\,dx$$

AUFGABE 5 **6 Punkte**

Für ein Getriebe wird eine rotationssymmetrische Zahnstange benötigt. Rotiert man den Graphen der Funktion $f:[0;5\pi]\rightarrow\mathbb{R}\,,\;\; x\mapsto 1+\cos x$ um die x–Achse, entsteht ein derartiges Objekt. Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunkts.

Tipp: $V=\dfrac{15}{2}\pi^2$

$$V=\int_0^{5\pi}\left(1+\cos x\right)^2\cdot\pi\;dx=\pi\cdot\int_0^{5\pi}\left(1+2\cos x+\cos^2 x\right)dx$$
$$=\pi\cdot\left[x+2\sin x+\frac{x+\sin x\cos x}{2}\right]_0^{5\pi}=\pi\cdot\left[\left(5\pi+0+\frac{5\pi+0}{2}\right)-\left(0+0+\frac{0+0}{2}\right)\right]$$
$$=\frac{15}{2}\pi^2$$

$$\int_0^{5\pi}x\cdot\left(1+\cos x\right)^2\cdot\pi\;dx=\pi\cdot\int_0^{5\pi}\left(x+2x\cos x+x\cos^2 x\right)dx$$
$$=\pi\cdot\left[\frac{x^2}{2}+2\left(\cos x+x\sin x\right)+\frac{\cos^2 x+2x\sin x\cos x+x^2}{4}\right]_0^{5\pi}$$
$$=\pi\cdot\left[\left(\frac{25\pi^2}{2}+2\left(-1+0\right)+\frac{1+0+25\pi^2}{4}\right)-\left(0+2\left(1+0\right)+\frac{1+0+0}{4}\right)\right]$$
$$=\pi\cdot\left(\frac{75\pi^2}{4}-2+\frac{1}{4}-2-\frac{1}{4}\right)=\pi\cdot\frac{75\pi^2-16}{4}$$

$$x_s=\frac{\pi\cdot\dfrac{75\pi^2-16}{4}}{\dfrac{15}{2}\pi^2}=\frac{\pi\cdot\left(75\pi^2-16\right)\cdot 2}{4\cdot 15\pi^2}=\frac{75\pi^2-16}{30\pi}\approx 7{,}68$$

$$S\left(7{,}68;\,0;\,0\right)$$

AUFGABE 6 **6 Punkte**

Lösen Sie das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ mit dem Gaußschen Eliminationsalgorithmus.

Geben Sie eine Darstellung der Lösung in ganzen Zahlen an.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 3 & 16 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 16 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_3 = \lambda, \quad x_4 = \mu$

$x_2 - \lambda = 4 \Rightarrow x_2 = 4 + \lambda$

$x_1 + 2x_2 + \lambda + \mu = 8 \Rightarrow x_1 + 2\left(4 + \lambda\right) + \lambda + \mu = 8 \Rightarrow x_1 = -3\lambda - \mu$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmt werden soll die positive Nullstelle der Funktion:

$$f(x) = 3 - 2x^2 + \ln\left(x^3 - x^2 + 1\right) = 0$$

a) Entwickeln Sie $f(x)$ in ein Mac Laurin Polynom 2. Ordnung und lösen Sie die so erhaltene quadratische Gleichung.

$$f(x) = 3 - 2x^2 + \ln\left(x^3 - x^2 + 1\right)$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^3 - x^2 + 1} - 4x$$

$$f''\left(x\right) = \frac{\left(6x-2\right)\left(x^3 - x^2 + 1\right) - \left(3x^2 - 2x\right)\left(3x^2 - 2x + 1\right)}{\left(x^3 - x^2 + 1\right)^2} - 4$$

$$f\left(0\right) = 3, \quad f'\left(0\right) = 0, \quad f''\left(0\right) = -6$$

$${}_2T_f\left(x\right) = 3 + 0x + \frac{-6}{2!}x^2 = 3 - 3x^2$$

$$3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow 3 = 3x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$x = 1$, weil eine positive Lösung gesucht ist.

b) Um die Näherung noch zu verbessern, wenden Sie das Newtonverfahren mit dem Startwert $x_0 = 1{,}0000$ zweimal an.

Geben Sie x_1 und x_2 mit vier Nachkommastellen an.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{3 - 2x^2 + \ln\left(x^3 - x^2 + 1\right)}{\dfrac{3x^2 - 2x}{x^3 - x^2 + 1} - 4x}$$

$$x_0 = 1{,}0000, \quad f(1{,}0000) = 1{,}0000, \quad f'(1{,}0000) = -3$$

$$x_1 = 1{,}0000 - \frac{1{,}0000}{-3{,}0000}$$

$$x_1 = 1{,}3333$$

$$x_1 = 1{,}3333, \quad f(1{,}3333) = -0{,}0901, \quad f'(1{,}3333) = -3{,}6588$$

$$x_2 = 1{,}3333 - \frac{-0{,}0901}{-3{,}6588}$$

$$x_2 = 1{,}3087$$