1 Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:

1.1 $y' = \frac{y}{x} + 1$ mit dem Anfangswert $y(1) = 0$

1.2 $y' = \cos x\,(y-1)$ allgemein

1.3 $y' = e^{y} + e^{-y}$ mit dem Anfangswert $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

(Hinweis: Substituieren Sie geeignet)

1.4 $y' = \frac{x-y}{x+y}$ allgemein

(Hinweis: Substituieren Sie $z = \frac{y}{x}$; machen Sie sodann eine Partialbruchzerlegung des von z abhängenden Integranden)

2 Lösen Sie mit Hilfe des partikulären Ansatzes:

2.1 $y' = 2y + e^{2x}$ allgemein

2.2 $y' + y = \cos x + \sin x$ mit dem Anfangswert $y(\pi) = e^{-\pi}$

2.3 $y' = x^2 + 2x + 3 - y$ mit dem Anfangswert $y(1) = 4$

2.4 $y' = 5y + e^{5x} - 4e^{3x}$ mit dem Anfangswert $y(0) = 2$

2.5 $y' = 2y - e^{x} - 2x + 1$ mit dem Anfangswert $y(0) = 0$

3 Lösen Sie mit dem Verfahren von Runge-Kutta näherungsweise die Differentialgleichung $y' = y^2 - \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)y + 3x$ mit dem Anfangswert $y(0{,}1) = 0{,}01$ und der Schrittweite $h = 0{,}2$. Erkennen Sie die Lösungsfunktion anhand der Zahlenwerte? Überprüfen Sie Ihre Vermutung durch Einsetzen in die Differentialgleichung.

4 Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = \frac{x-y}{x}$.

Erkennen Sie eine spezielle Lösung?

Berechnen Sie die allgemeine Lösung!

Lösungen

1.1 $\quad y(x) = x \ln x$

1.2 $\quad y(x) = 1 + Ce^{\sin x}$

1.3 $\quad y(x) = \ln \tan x$

1.4 $\quad y(x) = -x \pm x\sqrt{\dfrac{C}{x^2} + 2}$

2.1 $\quad y(x) = (x + C)\, e^{2x}$

2.2 $\quad y(x) = \sin x + e^{-x}$

2.3 $\quad y(x) = x^2 + 3$

2.4 $\quad y(x) = xe^{5x} + 2e^{3x}$

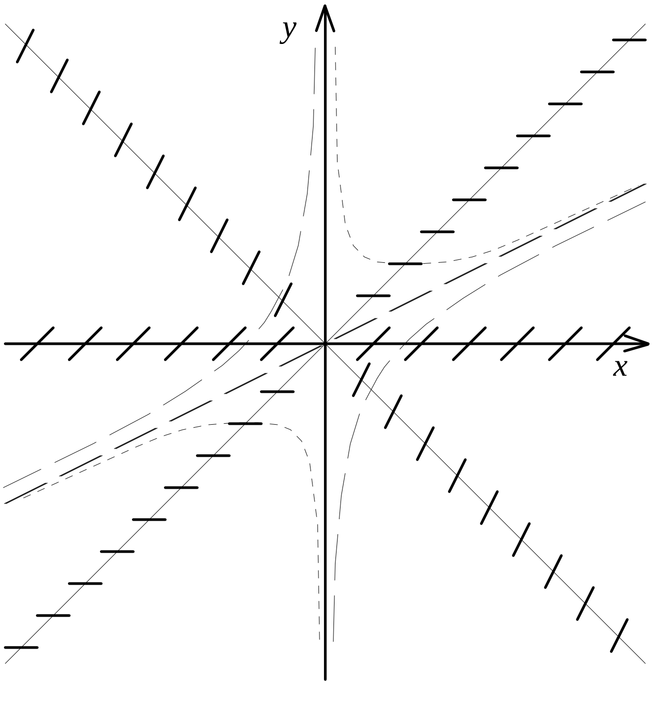
2.5 $\quad y(x) = x + e^{x} - e^{2x}$

3

x	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1
y	0,01	0,09	0,25	0,49	0,81	1,21	1,69	2,25	2,89	3,61	4,41

Vermutung: $y(x) = x^2$

4



Man erkennt $y(x) = \dfrac{x}{2}$.

Die allgemeine Lösung lautet $y(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{C}{x}$.