AUFGABE # 1 **5 Punkte**

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$ gilt.

AUFGABE # 2 **12 Punkte**

Gegeben sind die Mengen von Vektoren $V = \left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ und

$W = \left\{ \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ bezüglich der kanonischen Basis im $\mathbb{R}^3$.

a) Zeigen Sie, dass V eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. (2 P)

b) Orthonormalisieren Sie V. (6 P)

c) Geben Sie eine Matrix **A** an, für die $\mathbf{A} \cdot \vec{v}_i = \vec{w}_i$ für $i \in \{1;2;3\}$ gilt. (4 P)

AUFGABE # 3 **18 Punkte**

Betrachtet wird die Funktion $f(x;y) = \left(4x^2 + y^2\right) \cdot e^{2-x^2-4y^2}$.

a) Bestimmen Sie Lage und Art aller lokalen Extremalstellen. (12 P)

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an der Stelle $P\left(1 \mid -\frac{1}{2}\right)$. (3 P)

c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung an der Stelle $P\left(1 \mid -\frac{1}{2}\right)$ in Richtung $\begin{pmatrix} -0,8 \\ 0,6 \end{pmatrix}$.

(3 P)

AUFGABE # 4 **10 Punkte**

Um die positive Schnittstelle der Graphen der beiden Funktionen $f(x) = x \cdot e^{-x}$ und $g(x) = \frac{x^3}{2} + x - 252$ zu bestimmen, entwickeln Sie zunächst die Funktion f nachvollziehbar in ihre Mc-Laurin-Reihe vierter Ordnung ${}_fT_4(x)$ und lösen dann die Gleichung ${}_fT_4(x) = g(x)$.

AUFGABE # 5 **5 Punkte**

Bestimmen Sie den Entwicklungspunkt und den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x-20)^n}{n^2}$.