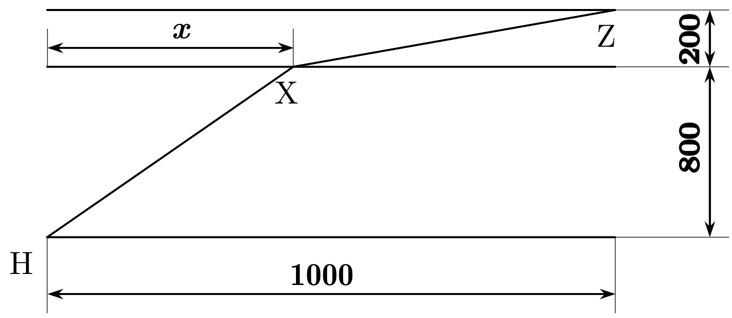
1 Gegeben ist die Funktion $f(x;y) = x^2 + x \cdot (5 - 3y) + 4y \cdot (y - 1)$.

1.1 Bestimmen Sie Lage und Art aller lokalen Extrema der Funktion *f*.

1.2 Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene E im Punkt $Q\left(2;\, 2;\, q_z\right)$ an.

1.3 Bestimmen Sie die Richtungsableitung von *f* an der Stelle $S\left(2;\, 1\right)$ in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$.

2 Ein Amphibienfahrzeug verlässt den Hafen H über Wasser mit der Geschwindigkeit v in Richtung X. Von dort fährt es mit doppelter Geschwindigkeit $2v$ über Land weiter bis zum Ziel Z.



2.1 Geben Sie eine Gleichung für die benötigte Reisezeit in Abhängigkeit von x an.

2.2 Um den Ort X zu finden, für den die Reisezeit auf dem Streckenzug HXZ minimal wird, muss die Gleichung $h(x) = 0$ für die Funktion $h(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 640000}} + \dfrac{x - 1000}{\sqrt{x^2 - 2000x + 1040000}}$ gelöst werden. Wenden Sie das Newtonverfahren mit dem Startwert $x_0 = 500$ einmal an, um eine Näherung x_1 für die Lage x von X zu bestimmen.

3 Um die kleinste positive Lösung der Gleichung $\sin(x) = e^{-x}$ zu bestimmen, werden zwei verschiedene Näherungsverfahren angewandt. Geben Sie in dieser Aufgabe alle Zahlenwerte mit vier Nachkommastellen an.

3.1 Entwickeln Sie beide Seiten nachvollziehbar in ein Mc-Laurin-Polynom dritten Grades (um die Stelle $x_0 = 0$) und lösen Sie die so entstandene Gleichung.

3.2 Wenden Sie das Newtonverfahren auf die Gleichung $\sin(x) - e^{-x} = 0$ mit dem Startwert $x_0 = 0$ an und bestimmen Sie x_1, x_2, x_3 und x_4.

4 Gegeben ist die Funktion $f(x;y) = \frac{1}{3}y^2 + 4xy - 8x^3$.

4.1 Geben Sie alle Stellen mit horizontaler Tangentialebene an.

4.2 Bestimmen Sie Lage und Art aller lokalen Extrema von f.

4.3 Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene E im Punkt $P(2 \mid 6 \mid z_P)$ an.

4.4 Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f an der Stelle $Q\left(1 \mid -3\right)$ in Richtung auf die Stelle $R(8 \mid 21)$.

5 Um die Gleichung $\sqrt{x} = 2 \cdot \ln(x)$ zu lösen, werden zwei verschiedene Näherungsverfahren angewandt. Geben Sie in dieser Aufgabe alle Zahlenwerte mit zwei Nachkommastellen an.

5.1 Entwickeln Sie beide Seiten nachvollziehbar in ein Taylorpolynom 2. Grades um die Stelle $x_0 = 2$ und lösen Sie die so entstandene quadratische Gleichung.

5.2 Wenden Sie das Newtonverfahren auf die Gleichung $\sqrt{x} - 2 \cdot \ln(x) = 0$ mit dem Startwert $x_0 = 1$ an und bestimmen Sie x_1, x_2, x_3 und x_4.

6 Gegeben ist die Funktion $f(x;y) = 3x^2 - 2y^3 + 6xy$.

6.1 Geben Sie alle Stellen mit horizontaler Tangentialebene an.

6.2 Bestimmen Sie Lage und Art aller lokalen Extrema von f.

6.3 Zeigen Sie, dass der Graph von f genau zwei Punkte P und Q der Form $\left(x; 1; 22\right)$ enthält.

6.4 Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene E im Punkt $Q\left(-4; 1; 22\right)$ an.

6.5 Zerlegen Sie den Kraftvektor $\vec{F} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ in einen Anteil $F^{\perp}$ senkrecht und einen Anteil $F^{\parallel}$ parallel zu E.

6.6 Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f an der Stelle $S\left(5; -2\right)$ in der Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ -0{,}8 \end{pmatrix}$.

7.1 Um die Schnittstellen der Graphen der beiden Funktionen $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x - \frac{x-2}{x+2}$ und $g(x) = 3 \cdot \cos x$ zu bestimmen, entwickeln Sie zunächst beide Funktionen in ihre Mc-Laurin-Polynome vierter Ordnung ${}_4T_f(x)$ sowie ${}_4T_g(x)$ und lösen dann die Gleichung ${}_4T_f(x) = {}_4T_g(x)$.

7.2 Um die erhaltene positive Lösung noch zu verbessern, wenden Sie schließlich das Newton-Verfahren auf das Problem $h(x) := g(x) - f(x) = 0$ mit dem Startwert $x_0 = 1$ einmal an. Runden Sie x_1 auf vier Nachkommastellen.

8 Gegeben ist die Funktion $f(x;y) = 4x^3 - 12xy - 576x + 6y^2 + 432y$.

8.1 Bestimmen Sie Lage und Art aller lokalen Extrema von A.

8.2 Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene E von A an der Stelle $Q(3;4)$ an.

8.3 Zerlegen Sie den Kraftvektor $\vec{F} = \begin{pmatrix} 33 \\ -2049 \\ 2 \end{pmatrix}$ in eine Komponente $\vec{F}^{\perp}$ senkrecht und $\vec{F}^{\parallel}$ parallel zu $E: 516x - 444y + z + 168 = 0$.

9 Betrachtet wird die Funktion $f: [0;2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 4 - x^2$. Für jedes $\xi \in (0;2]$ bildet die Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = \xi$ ein Dreieck mit den beiden Koordinatenachsen. Bestimmen Sie dasjenige ξ, für welches der Flächeninhalt des Dreiecks seinen minimalen Wert annimmt und bestimmen Sie diesen Flächeninhalt.

10 Im $\mathbb{R}^3$ ist eine Fläche gegeben durch $f(x,y,z) = x^2y + xyz - y^2 - 1 = 0$.

10.1 Bestimmen Sie Lage und Art aller lokalen Extremalstellen dieser Fläche.

Die Gerade $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ schneidet die Fläche in einem Punkt Q.

10.2 Bestimmen Sie den Winkel, den die Gerade mit der Tangentialebene der Fläche im Punkt Q einschließt.

10.3 Zerlegen Sie den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in einen Anteil $v_{\perp}$ senkrecht zu $E: x + 2z + 4 = 0$ und einen Anteil $v_{\parallel}$ parallel zu $E: x + 2z + 4 = 0$.

11 Gegeben sind die beiden Mengen $V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ und $W = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

Die Vektoren sind dabei in der kanonischen Basis geschrieben.

11.1 Zeigen Sie, dass sowohl V als auch W eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

11.2 Wie lautet die Basistransformation von V nach W?

11.3 Welche Koordinaten hat der Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}_V$ in der Basis W sowie in der kanonischen Basis?

11.4 Orthonormalisieren Sie die Basis V.

12 Überprüfen Sie, ob die Funktion $f(x) = 2x^3 - 18x^2 + 50x - 47$ punktsymmetrisch zu einem Punkt $P(x_0 \mid y_0)$ ist und geben Sie P gegebenenfalls an.

13 Die Fibonaccifolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ist rekursiv definiert durch $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n > 2$. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist dann konvergent. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ gilt.

14 Beweisen Sie mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, dass für $x > 0$ die Ungleichung $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$ gilt.

15 Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

15.1 $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

15.2 $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

16 Bestimmen Sie den Entwicklungspunkt und den Konvergenzradius der Reihe.

16.1 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3n(x+1)^n$

16.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-1)^n}{n^n}$